Several Problems in Global Singularity Theory (Singularity Theory and its Applications)

Sakuma, Kazuhiro

数理解析研究所講究録
1122 巻 2000 年 126-133

Several Problems in Global Singularity Theory

近畿大学理工学部数学物理学教室
佐久間　一浩 (Kazuhiro SAKUMA)

1. 序論

写像の大域的特異点理論 (Global Singularity Theory) の重要な問題は, しばしば古くから知られたトポロジーの未解決問題と密接に関係することがある. もう少し大胆に言ってしまうと, トポロジーの問題は殆どすべて特異点理論の問題に翻訳可能である. 本稿では, そのような 1 つの典型例について解説する. 尚, 全体を通して, 議論は C^∞ カテゴリーで行われる. 従って, 特別に断らない限り, 多様体や写像はすべて C^∞ 多様体, C^∞ 写像を表すとする. またここでは, 微分位相幾何学による考察を中心とする. 例えば, 多様体に "角 (corner)" が生じるときは, 適当に角を解消 (smoothing) した後できる多様体[1]を議論の対象としていると解釈願いたい. 2 つの多様体 M_1, M_2 が微分同相であるとき, $M_1 \cong M_2$ で表し, 同相であるときは,] $M_1 \approx M_2$ で表すことにする.

D^m により, m 次元球体を表すとする. 古典的な微分位相幾何学の問題として, 次の問題は重要である :

"Δ^3 をコンパクトで可縮な 3 次元多様体[2]とする. このとき,
$\Delta^3 \times D^r$ は, D^{3+r} に微分同相であろうか? "

$r=0$ の場合は, 簡単な議論から 3 次元ポアンカレ予想と同値である. $r=1$ の場合も, (5分程考えると分かるように) Schöenflies の定理から $r=0$ の場合と同値になる[3]. $r \geq 3$ では, Smale の h 同境定理を使えば肯定的に解決していることが分かる :
なぜならば, $W^n := \Delta^3 \times D^r$ $(n=3+r)$ とおくと, 明らかに W^n は可縮であり,

$$\partial W^n = \partial\Delta^3 \times D^r \cup \Delta^3 \times \partial D^r = S^2 \times D^r \cup \Delta^3 \times S^{r-1}$$

は, $r \geq 3$ なので単連結である. あとは, 対 $(W^n, \partial W^n)$ のホモロジー完全系列の計算と h 同境定理から W^n が D^n に微分同相であることが結論できる. 詳しくは, [1, 第 7 章] を参照されたい.
従って, 上の問題は (松本幸夫先生の言葉を借りれば)

"$r=2$ の場合が唯一残された弱い意味のポアンカレ予想である."

そこで問題を繰り返せば,

---

[1]勿論, 角を解消した後, 多様体上の微分構造は一意に定まることが知られている. [1] 参照.
[2]3 次元ホモトピー球体と言っても同じである.
[3]講演でも述べたように, これらは私の問題ではないのでこれ以上深入りしない.

問題. "Δ^3 をコンパクト可縮 3 次元多様体とする．このとき, $\Delta^3 \times D^2$ は, D^5 に微分同相であろうか？"

となる．

さて, この問題は容易に分かるように次と同値である：

" $\partial(\Delta^3 \times D^2)$ は, S^4 に微分同相であろうか？"

なぜならば, $\Delta^3 \times D^2$ が D^5 に微分同相ならば, $\partial(\Delta^3 \times D^2) \cong S^4$ は明らか．逆に, $\partial(\Delta^3 \times D^2) \cong S^4$ であるとすると, [1, 定理 7.17] から, $\Delta^3 \times D^2 \cong D^5$ であるからである．さて, 直ぐに気が付くことは, M. H. Freedman による単連結 4 次元位相多様体の分類定理から, $\partial(\Delta^3 \times D^2)$ は, S^4 に同相ではある．従って, $\Delta^3 \times D^2 \approx D^5$ ではある．しかし, 同相を微分同相で置き換えられるかどうかは現在のところ未解決なはずである．これにアタックする標準的考え方は, $\Delta^3 \times D^2$ のハンドル分解の考察であろう．つまりは, "代数的に消し合う有限個の 2 ハンドルと 3 ハンドルの対が幾何学的に消し合う"ことを結論できるか否かに懸かっている．多様体上のハンドルが互いにキャンセルするか否かを論ずることは, その上のモース関数を考えて, ある指数の臨界点どうしがキャンセルするかどうかを見ることと同じである．では, 多様体 M 上のモース関数 $f: M \to \mathbb{R}$ を考察するのではなく, 値域のユークリッド空間の次元を上げて, C^∞ 写像 $f: M \to \mathbb{R}^p$ $(p < \dim M)$ の特異点の情報を追跡 (**モース理論を一般化**) することを考えると, どうなるのであろうか?

2. 4 次元多様体上の安定写像

M^4 を 4 次元閉多様体, 即ちコンパクトで境界を持たない 4 次元多様体とする．M^4 の構造を調べるために, 一般的に存在する"良い写像" $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ を用いることを考える．$\mathbb{R}^3$ への写像に限定して考えることは, やや特殊な考察に過ぎないように思えるかもしれないが, 本節と次節の内容から, これが微分位相幾何学的に微妙で重要な問題の考察に格好の足場を与えることが理解されるだろう．そこで, 本節では"良い写像" の定義とそれに関わる性質を復習する．この場合, M^4 がコンパクトで, 値域がユークリッド空間だから写像 f には必ず特異点 (接空間の間の線形写像, つまり写像 f の微分, が退化する点) が現れる．

多様体上のモース関数の写像版にあたる概念は, R. Thom や Whitney によって定義された"安定写像 (stable map)" とよばれる次のものである ([5] 参照)[4]：

$C^\infty(M^4, \mathbb{R}^3)$ を Whitney 位相を入れた写像空間とする．$f \in C^\infty(M^4, \mathbb{R}^3)$ が**安定写像**であるとは, $C^\infty(M^4, \mathbb{R}^3)$ における f のある近傍 W_f が存在して, 各 $g \in W_f$ が f に C^∞ **同値**であるときをいう, 但しここで g が f に C^∞ 同値であるとは, 微分同相写像 $H: M^4 \to M^4$, $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

---

[4] ここでは次元対 (4, 3) に限定しているが安定写像の定義自体は一般次元対でそのまま可能である

が存在して, 次の図式が可換になるときをいう.

$$\begin{array}{ccc} M^4 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ M^4 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^3. \end{array}$$

安定写像全体の集合を $S^\infty(M^4, \mathbb{R}^3)$ と表す. このとき, $S^\infty(M^4, \mathbb{R}^3) \subset C^\infty(M^4, \mathbb{R}^3)$ は, (Whitney 位相の下で) 開かつ稠密であることが知られている ([5]). つまり, 任意の C^∞ 写像 $f \in C^\infty(M^4, \mathbb{R}^3)$ を少し摂動すると安定写像 $\tilde{f} \in S^\infty(M^4, \mathbb{R}^3)$ が得られるわけである. まさに, モース関数の写像版である.

さて, $f \in S^\infty(M^4, \mathbb{R}^3)$ に対して, 特異点集合を

$$S(f) = \{x \in M^4; \mathrm{rank}(df_x) < 3\}$$

と表す. 一般に安定写像 f に現れる特異点型は, $x \in S(f)$ を中心とする局所座標を (x_1, x_2, x_3, x_4), $y = f(x) \in \mathbb{R}^3$ を中心とする局所座標を (y_1, y_2, y_3) とするとき,

$$y_i \circ f = x_i \ (i = 1, 2), \quad y_3 \circ f = x_3^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_3^{k-i} \pm x_4^2 \qquad (1.1)$$

という標準形をもつものに限られる[5]ことが知られている ([5, Chapter VII] 参照), 但し $k = 1, 2, 3$ である. $k = 1$ のとき, **折り目特異点** (fold singularity) あるいは A_1 型特異点, $k = 2$ のとき, **尖点** (cusp singularity) あるいは A_2 型特異点, $k = 3$ のとき, **燕の尾特異点** (swallow-tail singularity) あるいは A_3 型特異点と呼ばれる. また特に,

$$y_i \circ f = x_i \ (i = 1, 2), \quad y_3 \circ f = x_3^2 + x_4^2$$

のときは, **定値**折り目特異点 (definite fold singularity) あるいは A_1^+ 型特異点,

$$y_i \circ f = x_i \ (i = 1, 2), \quad y_3 \circ f = x_3^2 - x_4^2$$

のときは, **不定値**折り目特異点 (indefinite fold singularity) あるいは A_1^- 型特異点と呼んで区別することがある.

値域が 3 次元であると, その特異点集合は大変良い性質を持っている. (1.1) から容易に分かるように[6], $S(f)$ は M^4 の 2 次元閉部分多様体で, 尖点の集合は 1 次元, 燕の尾特異点は離散点である.

安定写像 f の A_k 型特異点集合を $A_k(f)$ と表すとすると,

$$S(f) = \overline{A_1(f)} = A_1^+(f) \cup A_1^-(f) \cup A_2(f) \cup A_3(f),$$

$$\overline{A_2(f)} = A_2(f) \cup A_3(f)$$

である, 但しここで定値折り目特異点集合と不定値折り目特異点集合とをそれぞれ分けて $A_1^+(f) \cup A_1^-(f) = A_1(f)$ と表し, $\overline{A_k(f)}$ は $A_k(f)$ の

[5]ここでは f を安定写像としているが generic map に対しても同様である.
[6]標準形からそのヤコビアンを計算せよ.

閉包 (closure) を表す. つまり, 安定写像により M^4 に滑層分割 (stratification) が与えられる：

$$M^4 = R(f) \cup A_1^+(f) \cup A_1^-(f) \cup A_2(f) \cup A_3(f) \tag{1.2}$$

ここで, $R(f)$ は f の正則点 (regular point) 集合を表す. この分解と M^4 そのものの構造に関することは [8] を読むと面白いので参照されたい. また, 任意の安定写像 f に対して, 必ず $A_1^+(f) \neq \emptyset$ であることに注意しておく.

さて, 前節で触れたハンドルのキャンセル (モース関数の臨界点の消去) に当たるものは何であろうか？

この答えは当然, 滑層 (strata) のキャンセル (写像の特異点の消去) である. 但し, (1.2) の分解からも分かるように, 次元の低い方からキャンセルしていかなければ難しい. この方面の研究はハンドルのキャンセルの研究同様やはり難しく, これに挑む Singularitists[7] は世界でも少ない. スペシャリストが山口大学の安藤良文氏である. 例えば, (1.2) で M^4 が向き付け可能ならば, $A_3(f) = \emptyset$ と出来ることが安藤の定理 ([2]) から従う. 更に詳しいことに関しては, [6] をも参照していただきたい.

3. 4次元多様体上の定値折り目写像

本節ではやや視点を変えて, キャンセルされた多様体の構造にはどのような制限が付くか, 正確に述べれば, "ある限られた特異点型しか持たない C^∞ 写像を許容する多様体はどのように特徴づけられるか？ ", という問題を考えることにしよう.

M^4 を4次元閉多様体, $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ を安定写像とする. 写像 f が $S(f) = A_1^+(f)$ であるとき, つまり特異点が定値折り目特異点しか現れないとき, **定値折り目写像** (special generic map) と呼ぶことにする[8]. そこで次のことを考えよう：

> "定値折り目写像を許容する4次元閉多様体 M^4 の微分同相類を決定せよ."

最初にこの種の問題を考えたのが, Burlet - de Rham ([3]) であり, special generic map (applications générique speciale) の命名も彼等に依る. Burlet - de Rham によりこの問題を解くために考案された道具立てが代数幾何でよく使われる "スタイン分解 (Stein factorization)" で, 我々の場合も大変有効である.

---

[7]これは特異な人たちという意味ではない

[8]日本語による定義と英語名が合わないことは気にしないでいただきたい. special generic map は下手に訳すと矛盾した語感を与える恐れがある. 以前, 福田拓生先生から "特殊生成写像" はどうかという提案をもらい一度使ったことがある.

定義 3.1. $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ を安定写像とする. $x, x' \in M^4$ に対して, 次の２つの条件を満たすとき同値であると定義する： $x \sim x'$

(i) $f(x) = f(x') = y$

(ii) x と x' は $f^{-1}(y)$ の同じ連結成分に属する.

このとき, 商空間 $M/\sim$ を W_f と書いて, 写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ の**スタイン分解**という. また, 商写像を $q_f: M^4 \to W_f$ とする.

$f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ を定値折り目写像とすると W_f には, 写像の性質と多様体 M^4 の構造の情報が凝縮されている. 実際, 次のことが成り立っている.

補題 3.2. ([9], [11]) 定値折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ に対して, スタイン分解 W_f が定義されて,

(1) W_f はコンパクトな境界をもつ３次元多様体である.

(2) ∂W_f は, $S(f) = A_1^+(f)$ に微分同相である.

(3) 誘導写像 $(q_f)_*: \pi_1(M^4) \to \pi_1(W_f)$ は基本群の同型を定める.

(4) M^4 が単連結とすると $S(f)$ は２次元球面のみからなる. 更にこのとき, 特異点集合 $S(f)$ の連結成分の個数を $\sharp S(f)$ とすると,

$$\sharp S(f) = \frac{1}{2} b_2(M^4) + 1$$

が成り立つ.

証明は省略するが, (1), (2) は標準形をじっと見るとわかる. (3) は, (1),(2) と合わせて, 次に述べるように M^4 がある２つのファイバー束を微分同相で貼り合わせて復元できることによる. (4) は, (1), (2), (3) と対 $(W_f, \partial W_f)$ のホモロジー完全系列を調べれば分かる. ここで M^4 が復元可能であるという事実は重要で実際, 佐伯修氏により次のような明解な特徴付けが与えられている.

定理 3.3. ([9]) 定値折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 境界をもつコンパクト向き付け可能な３次元多様体 W と W 上の S^1 束 E_1, ∂W 上の D^2 束 E_2 が存在して,

(ii) M^4 は E_1 と E_2 を境界の間の微分同相写像 $\varphi: \partial E_1 \to \partial E_2$ で底空間 ∂W の恒等写像を被覆する束写像で同一視した多様体に微分同相である： $M^4 \cong E_1 \cup_\varphi E_2$.

これらの事実を総合すると, M^4 が単連結であるとして, 定値折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ でその特異点集合が連結であるようなものが存在するならば, W_f が３次元ホモトピー球体 Δ^3 になり, M^4 は

$$M^4 = W_f \times S^1 \cup \partial W_f \times D^2 \cong \Delta^3 \times S^1 \cup S^2 \times D^2$$

となり S^4 に同相であることは容易に分かり, 結局このような M^4 が S^4 に微分同相かどうかは, 冒頭で述べた**問題**を解くことと同値である. こうして, 微分トポロジーの問題が写像の特異点論の問題に翻訳された.

ついでに同様の未解決問題について触れておくことにする.

定理 3.3 は大変強力で, M^4 の基本群に制限をつけるとその微分同相分類が可能である. 例えば, M^4 の基本群が自由群であるとすると次の結果を得る.

定理 3.4.([7]) M^4 を基本群が自由群である 4 次元閉多様体とする. このとき, M^4 が定値折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ を許容するための必要十分条件は, M^4 が次のいずれかと微分同相になることである :

$$\sharp^{r-k} S^1 \times S^3 \sharp^k S^1 \tilde{\times} S^3 \sharp^l S^2 \times S^2 \sharp^s S^2 \tilde{\times} S^2 \sharp \Sigma^4$$

但し, $k, s \in \{0, 1\}$, $l \geq 0$ で, $r = \operatorname{rank} \pi_1(M^4)$, $S^1 \tilde{\times} S^3$ は S^1 上の非自明 S^3 束, $S^2 \tilde{\times} S^2$ は S^2 上の非自明 S^2 束, $\Sigma^4 = \partial(\Delta^3 \times D^2)$ である. 特に, M^4 が単連結のときは, $r = k = 0$ と見なす.

この結果から問題となる微妙な例が Scharlemann 多様体と呼ばれるものである. その構成をまず復習しよう. $\Sigma = \Sigma(2,3,5)$ を $(2,3,5)$ 型のブリスコーン多様体とする. これはホモロジー 3 球面でその基本群は位数１２０の２重正１２面体群と呼ばれる群に同型である. ちなみにその中心は位数 2 の有限群 $\mathbb{Z}_2$ である. このとき, 元 $\alpha \in \pi_1(\Sigma \times S^1$ で, $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$ であり, $\alpha \notin Z(\pi_1(\Sigma)) = \mathbb{Z}_2$ であるループを選んで, その管状近傍 $S^1 \times D^3$ を引き抜いて, $S^2 \times D^2$ を trivial framing で貼り付ける (つまり, スピン手術を行う). これが Scarlemann 多様体である[9]. 出来上がった 4 次元多様体 X^4 は, $\pi_1(\Sigma)$ の構造 (関係式) を考えれば分かるように, 手術により非自明なループが消えて, S^1 の生成元のみ残り, $\pi_1(X^4) \cong \mathbb{Z}$ である. また, Scharlemann はこの X^4 が $S^1 \times S^3 \sharp S^2 \times S^2$ に位相的に s 同境であることを示した ([12]). 従って, Freedman による位相的 s 同境定理から $S^1 \times S^3 \sharp S^2 \times S^2$ に同相である. 定理 3.4 から $S^1 \times S^3 \sharp S^2 \times S^2 \Sigma^4$ は, 定値折り目写像を許容する. しかし, X^4 が許容するかどうか ($S^1 \times S^3 \sharp S^2 \times S^2 \Sigma^4$ に微分同相かどうか) は今のところ分からない. 一方で, 次節で述べるように X^4 は折り目特異点のみをもつ安定写像 $g: X^4 \to \mathbb{R}^3$, s.t. $S(f) = A_1(f)$ は許容する. 従って, $S^1 \times S^3 \sharp S^2 \times S^2$ 上の微分構造に関する問題は, 写像 g の A_1^- 型特異点が消去できるかどうかに懸かっている. もしも, この特異点を消去できない障害が見つかれば, $S^1 \times S^3 \sharp S^2 \times S^2$ 上の異種微分構造が見つかったことになる. この例の微妙なのは, $X^4 \sharp S^2 \times S^2$ は $S^1 \times S^3 \sharp^2 S^2 \times S^2$ に微分同相で, つまり定理 3.4 から $X^4 \sharp S^2 \times S^2$ は定値折り目写像を許容するという事実からも分かる. 最近, Akbulut によりいくつかの Scharlemann 多様体は $S^1 \times S^3 \sharp S^2 \times S^2$ に微分同相であるという結果が発表されたようである.

---

[9]ループ α の選び方は１１８通りあるので, 多くとも１１８の異なる Scharlemann 多様体が存在する. しかしそれらはすべて互いに同相ではある.

4. 折り目写像

安定写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ が, $S(f) = A_1(f) = A_1^+(f) \cup A_1^-(f)$ であるとき, 即ち, 写像 f の特異点が折り目 (A_1 型) 特異点のみからなるとき, f を**折り目写像**と呼ぶことにする. 当然, 定値折り目写像は折り目写像である. 逆は一般に成り立たない. 例えば, ある $\mathbb{R}P^2$ 上の $\mathbb{R}P^2$ 束で折り目写像を許容する (向き付け不可能な) 4次元閉多様体 N^4 が存在する ([10] 参照) が, 定理 3.3 の分解から直ぐに分かるように, $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ が定値折り目写像とすると, オイラー標数 $\chi(M^4)$ は偶数でなければならないが, 一方 $\chi(N^4) = 1$ である. 従って, N^4 は折り目写像を許容するが, 定値折り目写像を許容しない.

前節で述べた Scharlemann 多様体との関連でも重要な折り目写像の存在定理に触れておこう.

定理 4.1.([4]) M^4 が安定平行化可能ならば, 折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ が必ず存在する.

さて, $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ を折り目写像とすると, ヤコビアン $J_f(x)$ ($x \in S(f)$) の計算から, 制限写像 $f|S(f): S(f) \to \mathbb{R}^3$ は正規交叉をもつはめ込みであることが従う ([5, Theorem 4.4, p. 87]). $S(f)$ は必ずしも連結とは限らない閉曲面だから, 一般に $f|S(f)$ は2重点または3重点をもつはめ込みである. そこで, 仮に制限写像 $f|S(f): S(f) \to \mathbb{R}^3$ が埋め込みであったとすると, M^4 について何が分かるだろうか. 特に, $M^4 \cong \partial(\Delta^3 \times D^2)$ のときは, $S(f)$ は連結で2次元球面であった. するとこの場合, Schoënflies の定理より, $S(f)$ は $\mathbb{R}^3$ で D^3 の境界となっている. そしてこの D^3 が W_f の役目を果たしていることになり, M^4 は正真正銘の4次元球面になる. 従って, M^4 の微分構造に際どいところがあるならば, それは特異点集合への制限写像であるはめ込みの自己交叉点にその情報が集中していることになる. つまり, 問題の同値性から Δ^3 の2ハンドルと3ハンドルがキャンセルできるかどうかとはめ込み写像 $f|S(f): S(f) \cong S^2 \to \mathbb{R}^3$ の自己交叉点が消去できるかどうかが密接に関係していることになる. 残念ながら, これから先は, 私には未だよく分からない.

References

[1] 田村　一郎, 微分位相幾何学, 岩波書店.

[2] Y. Ando, *On the elimination of Morin singularities*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 471 - 487; Erratum, **39** (1987), 537.

[3] O. Burlet et G. de Rham, *Sur certaines applications générique d'une variété close à trois dimensions dans le plan*, Enseign Math. **20** (1974), 275 - 292.

[4] J. M. Èliasberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR-Izv. **6** (1972), 1302 -1326.

[5] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable mappings and their singularities, Grad. Texts in Math. vol. 14, 1973, Springer-Verlag.

[6] O. Saeki and K. Sakuma, *Elimination of singularities: Thom polynomials and beyond*, London Math. Soc. Lecture Notes Series **263** "Singularity Theory" (ed. by B. Bruce and D. Mond), 1999, pp. 291 - 304.
[7] O. Saeki and K. Sakuma, *On special generic maps into* $\mathbb{R}^3$, Pacific J. Math. **184** (1998), 175 - 193.
[8] O. Saeki, *Studying the topology of Morin singularities from a global viewpoint*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **117** (1995), 223 - 235.
[9] O. Saeki, *Topology of special genric maps into Euclidean spaces*, Topology Appl. **49** (1993), 265 - 293.
[10] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 551 - 566.
[11] K. Sakuma, *On special generic maps of simply connected 2n-manifolds into* $\mathbb{R}^3$, Topology Appl. **50** (1993), 249 - 261.
[12] M. Scharlemann, *Constructing strange manifolds with the dodecahedral space*, Duke J. Math. **43** (1976), 33 - 40.